图像处理技术：直线检测

Lipton　　2002.5.

Hough变换可以检测已知形状的目标，而且受噪声和曲线间断的影响小。下面介绍采用哈夫(Hough)变换，在二值化图像中检测直线，确定其参数的方法。

1. 基本原理

哈夫变换的基本思想是利用点----线的对偶性。如图1所示：

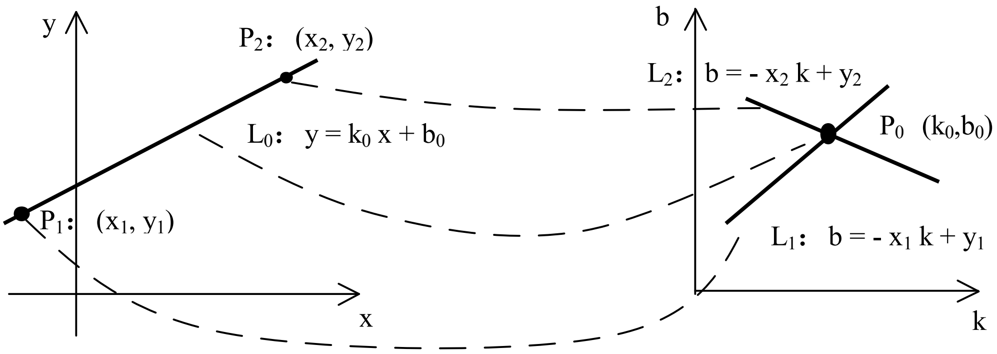


图1　点----线的对偶性

从图1中可看出，x-y坐标和k-b坐标有点----线的对偶性。x-y坐标中的点P_1、P_2 对应于k-b坐标中的L_1、L_2；而k-b坐标中的点P_0对应于x-y坐标中的线L_0 。

由于x-y坐标中的垂直线的k值为无穷大，给计算带来不便，故使用点----正弦曲线对偶变换解决这一问题。直角坐标X-Y中的一点(x,y)，经过点----正弦曲线对偶变换：

$$p = x * \cos(a) + y * \sin(a)$$

在极坐标a-p中变为一条正弦曲线，a取(0 ~ 180°)。可以证明，直角坐标X-Y中直线上的点经过Hough变换后，它们的正弦曲线在极坐标a-p有一个公共交点，如图2所示。

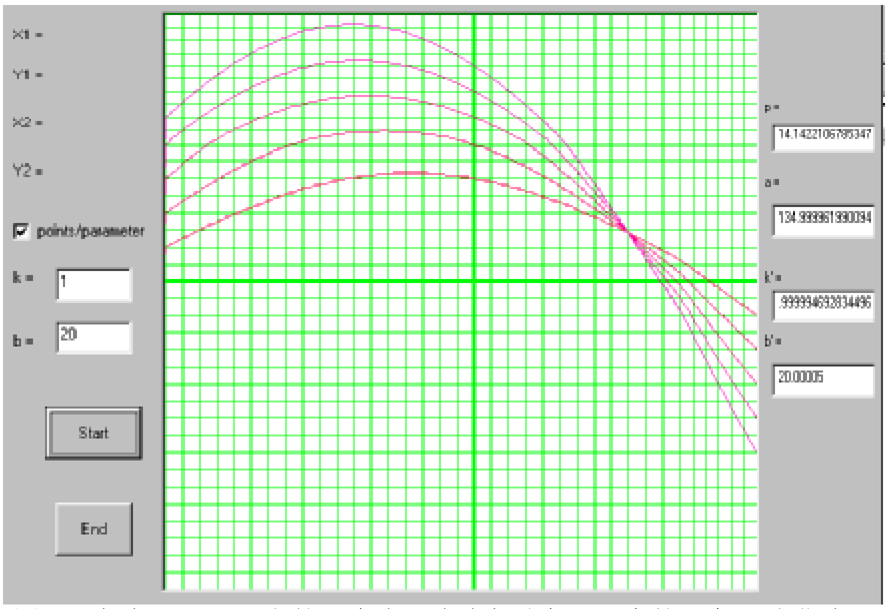


图 2　直线 y = x+20 上的 5 个点对应在极坐标 a-p 中的 5 条正弦曲线

也就是说，极坐标a-p上的一点(a，p)，对应于直角坐标X-Y中的一条直线。而且它们是一一对应的。

为了检测出直角坐标X-Y中由点所构成的直线，可以将极坐标a-p量化成许多小格。根据直角坐标中每个点的坐标(x,y)，在$a = 0 \sim 180^o$内以小格的步长计算各个p值，所得值落在某个小格内，便使该小格的累加记数器加1。当直角坐标中全部的点都变换后，对小格进行检验，计数值最大的小格，其(a，p)值对应与直角坐标中所求直线。

2. 直角坐标上的一直线经过 Hough 变换后对应于极坐标上的一点

设直角坐标X-Y中一直线的直线方程为：$y = k x + b$，斜率为k、截距为b，在其上有两点(x1,y1)、(x2,y2)。证这两点经过Hough变换后，所得正弦曲线交于一点，该点只与k、b有关。

即，由方程组：

$$\begin{cases} p = x1 \cos(a) + y1 \sin(a) & \ldots\ldots \quad (1) \\ p = x2 \cos(a) + y2 \sin(a) & \ldots\ldots \quad (2) \end{cases}$$

求：a，p。

由(1)式、(2)式可得：

$$x1 + y1\ tg(a) = x2 + y2\ tg(a)$$

$$tg(a) = -(x2 - x1) / (y2 - y1) = - 1 / K \ ;$$

即： $a = arctg(-1 / K)$

或： $k = - ctg(a)$ …… (3)

再由： $p = x1 \cos(a) + y1 \sin(a)$

$= x1 \cos(a) + (k * x1 + b) * \sin(a)$

将 $k = - ctg(a)$ 达入上式，得：

$p = x1 \cos(a) - x1 \cos(a) + b * \sin(a) = b * \sin(a)$ ……(4)

$= b * \sin(arctg(-1 / K))$

故方程组的解为：

$$\begin{cases} a = arctg(-1 / K) \\ p = b * \sin(arctg(-1 / K)) \end{cases}$$

显然，正弦曲线交点(a，p)只与k、b有关。

反之，已知点(a，p)，可确定直线参数k、b。

由(3)式、(4)式可得

当$a \neq 0$ 时， $k = - ctg(a)$

. $b = p / \sin(a)$ ；

当$a = 0$ 时，$k = \infty$，直线为垂直线。$x1 = x2$，由(1)式、(2)式可得：

$y1 \sin(a) = y2 \sin(a)$

因为 $y1 \neq y2$ ，

所以 $a = 0$，

$x = p$ （参见图3） …… (5)

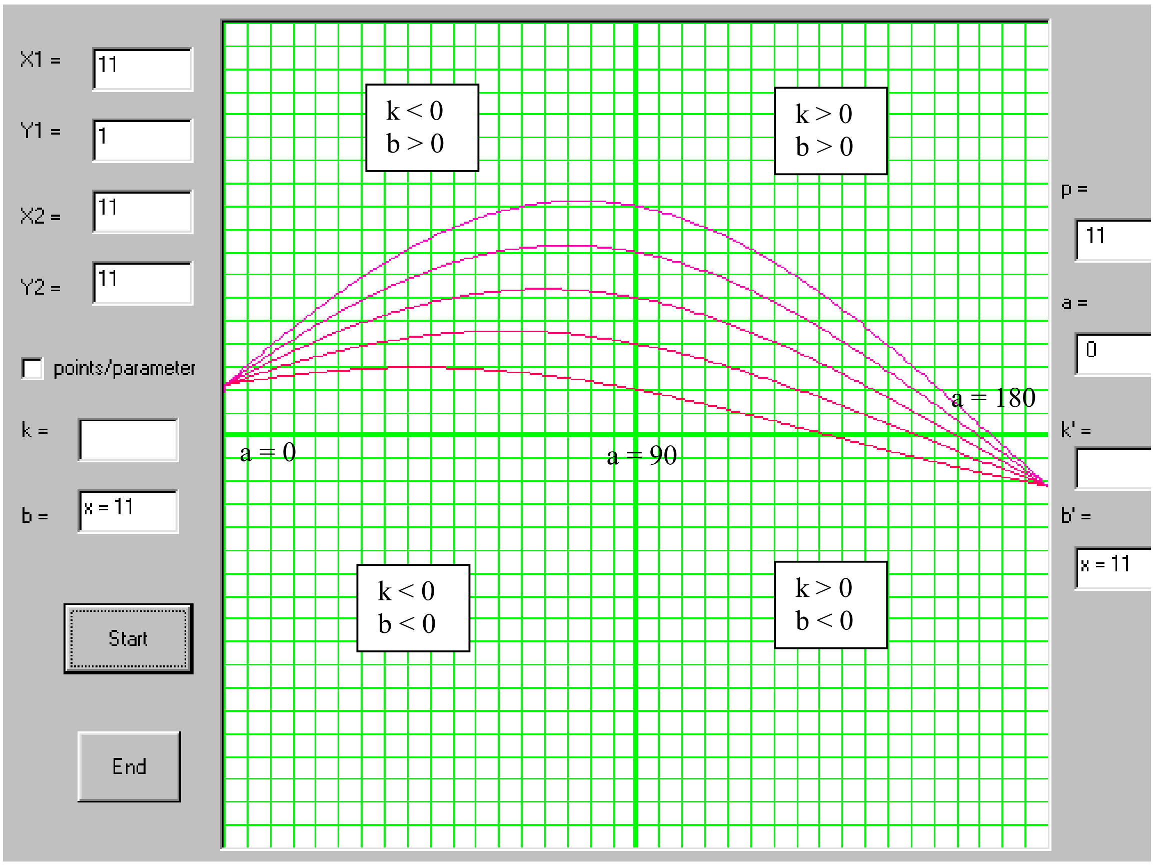


图 3　直线 x = 11 上的 5 个点对应在极坐标 a-p 中的 5 条正弦曲线，
以及四个区域与 k、b 的取值关系

3. 极坐标的范围：

设：被检测的图像在第一象限，右上角坐标为(m,n)。

我们对　$p = x\cos(a) + y\sin(a)$　求导，得，

$$p' = -x\sin(a) + y\cos(a)$$

若　$p' = 0$

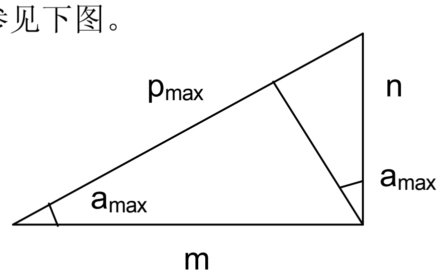
则　$tg(a) = y / x$

即　$a_{max} = arctg(n / m)$ 时，有极大值p_{max}。

$$p_{max} = m\cos(a_{max}) + n\sin(a_{max}) \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

$$= (m*m + n*n)^{1/2}$$

上式推导，参见下图。



由前面结果：
$$\begin{cases} a = arctg(-1 / K) \\ p = b * \sin(arctg(-1 / K)) \end{cases}$$

可以看出，在0~180°内有唯一的解，因此，a的取值范围在0~180°内即可。

而p有正有负，由b、k决定。

如图3所示，当 $0° < a < 90°$， $p > 0$ ， $k < 0$，$b > 0$ ；

当 $0° < a < 90°$， $p < 0$ ， $k < 0$，$b < 0$ ；

当 $90° < a < 180°$，$p > 0$ ， $k > 0$，$b > 0$ ；

当 $90° < a < 180°$，$p < 0$ ， $k > 0$，$b < 0$ 。

因此，定义累加记数器的大小为：（180，$2 * p_{max}$）。

4. a、p的分辨率与直线位置精度的关系：

已知a、p与直线的斜率和截距的关系为：

$$k = -\,ctg(a)$$

$$b = p / sin(a)$$

因为 x、y 的分辨率为一个像素，而 p 的分辨率是大于 x、y 的，参见式(6)。所以，直线位置精度的关键在于 a 的分辨率。若 a 的分辨率为 0.1 度，该精度为：若直线长为 570 个像素，则其角度偏差小于 1 个像素。

5. 具体算法：

5.1 两条直线的检测及其夹角算法：

a. 在原图中找黑点；

b. 根据黑点坐标在 ap 平面画正弦曲线，曲线经过之处，记数器加 1；

c. 在 ap 平面里找最大值（参见表 1），根据其坐标计算第一条直线的 k1、b1；

d. 将最大值的邻域清零，一般邻域取±5 ~ ±10 个单位即可；

e. 再次在 ap 平面里找最大值（参见表 2），根据其坐标计算第二条直线的 k2、b2；

f. 计算两条直线的夹角Φ，$tg(\Phi) = (k1 - k2) / (1 + k1 * K2)$。若遇 90 度直线则不能套用此公式。

例 1 结果见图 4。

表 1 例 1 的 ap 平面里最大值的邻域数据

p \ a	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96
38	18	14	9	4	4	5	114	83	44	36	38
39	17	13	6	5	8	7	96	50	36	13	20
40	10	12	4	7	5	9	137	54	18	6	12
41	7	9	8	6	11	39	120	63	6	13	12
42	7	8	5	7	9	162	72	10	3	26	11
43	10	5	8	10	38	**192**	16	2	3	29	17
44	8	8	6	9	97	151	11	3	3	18	17
45	9	6	11	29	91	74	34	2	3	10	13
46	13	11	13	38	82	32	7	3	9	13	13
47	7	12	40	72	74	15	2	4	29	11	14
48	14	18	22	66	74	14	3	2	28	17	17

表 2　例 1 的 ap 平面里的第二次查找出的最大值邻域数据

p \ a	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95
6	2	3	3	4	6	42	64	36	2	5	2
7	3	3	3	5	6	28	142	2	6	3	3
8	4	4	3	3	5	11	135	3	4	2	2
9	3	4	4	5	6	69	39	3	5	2	3
10	5	5	4	3	5	166	3	2	9	3	3
11	4	3	3	5	10	170	3	3	4	3	3
12	3	3	2	5	73	92	2	2	3	3	5
13	4	3	3	4	63	6	2	5	3	5	6
14	2	2	3	13	78	2	2	6	6	7	5
15	2	2	3	34	81	3	4	13	6	4	6
16	2	2	4	31	115	6	5	8	4	6	18

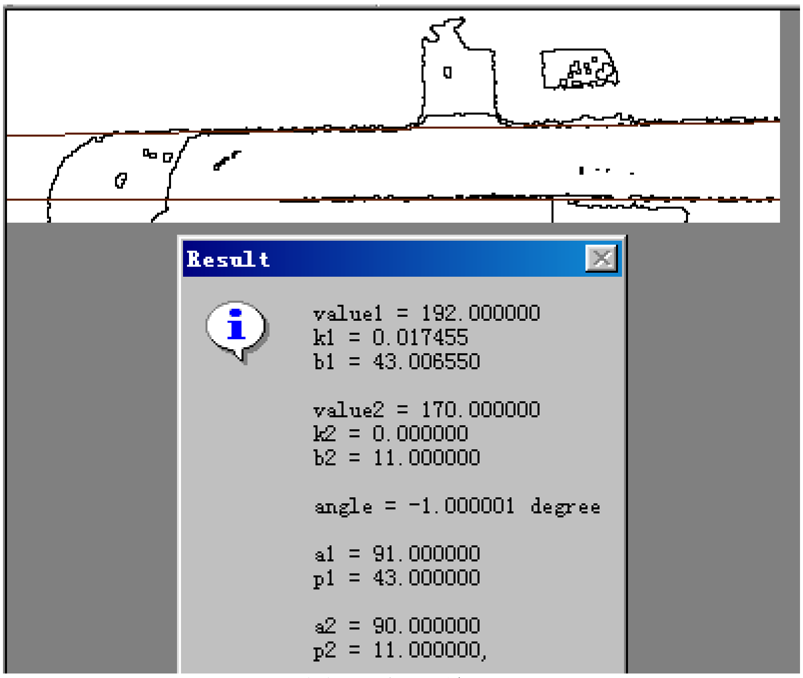


图 4　例 1 结果

5.2 精确检测的算法

在为了提高计算精度，又节约时间，采取两次检测法。第一次全局检测，a 的分辨率为 1 度、p 的分辨率为一个像素，找到一直线，得其参数 k、b；第二次在此直线的邻域进行检测，a 的分辨率为 0.1 度。再次求其 k、b。

第二次局部检测在第一直线的邻域进行检测。分两种情况：

a. 直线倾向于 x 轴，由 x 计算 y

即根据第一次计算出的 k、b，在

$$\begin{cases} y1 = k\,x + b - 10 \\ y2 = k\,x + b + 10 \end{cases}$$

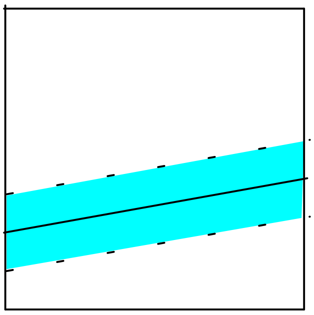
这两条线内进行检测。如下图 5 所示。

b． 直线倾向于 y 轴，由 y 计算 x

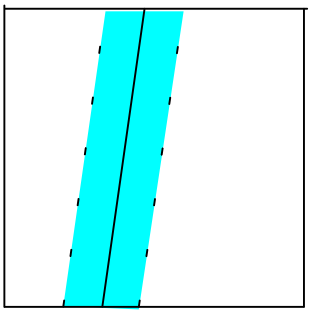
限定检测区域的两直线为：

$$\begin{cases} x1 = (y - b) / k - 10 \\ x2 = (y - b) / k + 10 \end{cases}$$

如下图 5 所示。



a 情况



b 情况

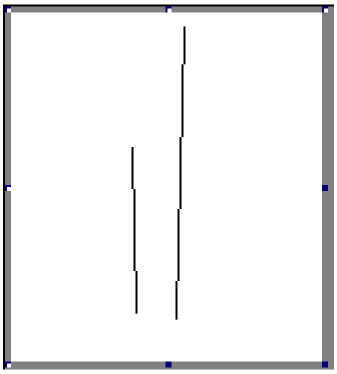
图 5 检测区域的两种情况

如果是一条垂直线，即：x = p1，则两直线为：

$$\begin{cases} x1 = p1 - 10 \\ x2 = p1 + 10 \end{cases}$$

注意：此时 a 的域值为(a1-9, a1+9)；a1 为第一次检测到的角度值，a 分辨率为 0.1 度。

例 2：第二次检测和第一次检测结果的比较：



原图

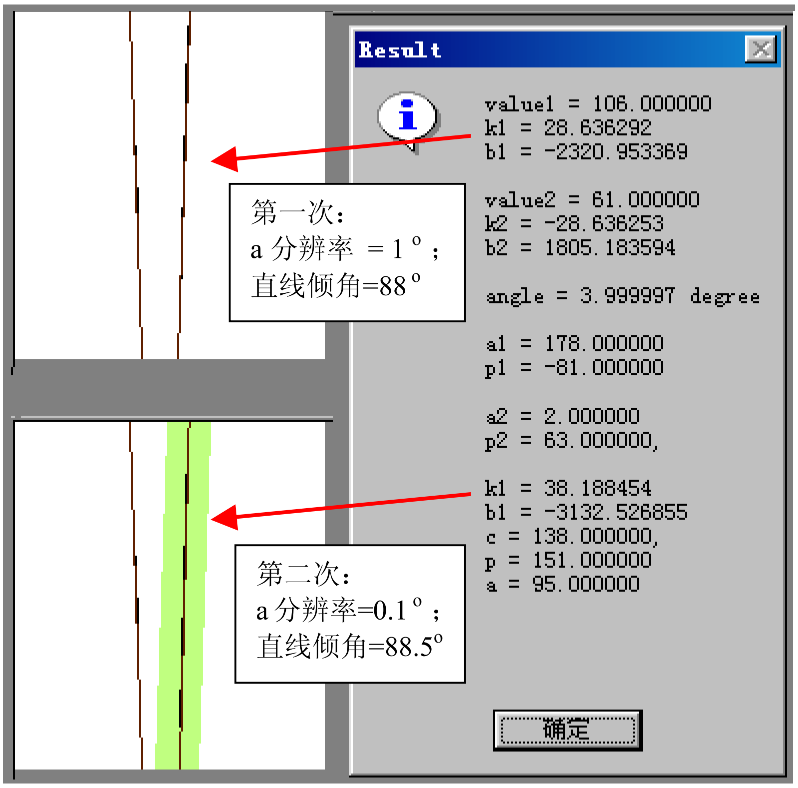


图 6 第二次检测和第一次检测结果的比较

从图 6 中可以清楚的看出，第二次的结果比第一次拟合的准确。第一次的拟合角度偏小，上边重合的少，下边重合的多。从数值上看也出这一点。